

۱

گزینه درست: ۲

سوال ۱

گزینه «۲»

$$(1) \Rightarrow 5, y, x \Rightarrow 2y = x + 5 \Rightarrow y - 5 = x - y$$

$$(2) \Rightarrow 25, x - y, y^2 \Rightarrow (x - y)^2 = 25y^2$$

(1), (2)

$$\longrightarrow (y - 5)^2 = 25y^2$$

$$\Rightarrow (y - 5)^2 - 25y^2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$(y - 5 - 5y)(y - 5 + 5y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{5}{6} \\ y_2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{10}{3} \\ x_2 = -\frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \begin{cases} \frac{425}{36} \\ \frac{925}{16} \end{cases} : \frac{425}{36} < \frac{925}{16}$$

۲

گزینه درست: ۱

سوال ۲

گزینه «۱»

ابتدا به ساده سازی عبارت داده شده می پردازیم:

$$\sqrt[3]{8\sqrt[3]{5/25}} = \sqrt[3]{2^3 \times 5^{-2/3}} = \sqrt[3]{2^3 \times 5^{-2/3}} = 2 \times 5^{-1/3}$$

$$\sqrt[3]{4\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2^2 \times 3^{1/3}} \Rightarrow 2^{2/3} \times 3^{1/9}$$

$$\Rightarrow A = 2^{1/3} \times 2^{2/3} \times 3^{1/9} = 2 \times 3^{1/9}$$

حال داریم:

$$\left(\left(\frac{A}{2}\right)^9 + 5\right)^{1/3} = \left(\left(3^{1/9}\right)^9 + 5\right)^{1/3} = 8^{1/3} = 2$$

۳

گزینه درست: ۱

سوال ۳

گزینه «۱»

با ساده سازی عبارت زیر رادیکال داریم:

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = |\sqrt{x-1} - 1|$$

$$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$$

$$\longrightarrow \sqrt{x-1} - 1$$

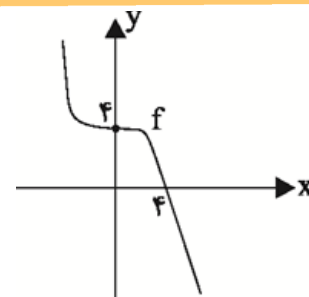
$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1} - 2)^2} = |\sqrt{x-1} - 2|$$

$$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$$

$$\longrightarrow -\sqrt{x-1} + 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} - 1 - \sqrt{x-1} + 2 = 1$$

۴



گزینه درست: ۲

سوال ۴

تابع f در بازه‌ی $(-\infty, ۴)$ مثبت و در بازه‌ی $(۴, +\infty)$ منفی است. جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x	-۲	۰	۳	۴
f(x)	+	+	+	+
x	-	۰	+	+
x + ۲	+	۰	+	+
۳ - x	+	+	+	-
A	-	۰	+	-

توجه کنید که عبارت $۲x^۲ + ۱$ همواره مثبت است و تأثیری در تعیین علامت ندارد. با توجه به جدول تعیین علامت عبارت در بازه‌ی $(۰, ۳)$ مثبت است که از مقایسه‌ی آن با بازه‌ی $(۰, a)$ در صورت سوال مقدار $a = ۳$ به دست می‌آید.

۵

گزینه درست: ۱

سوال ۵

گزینه «۱»

با قرار دادن ریشه $x = ۱$ در معادله خواهیم داشت:

$$۳ + a - ۴ - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

از طرفی $x - ۱$ در تجزیه عبارت $۳x^۳ + ۲x^۲ - ۴x - ۱$ وجود دارد بنابراین با تقسیم عبارت اخیر به $x - ۱$ خواهیم داشت:

$$۳x^۳ + ۲x^۲ - ۴x - ۱ = (x - ۱)(۳x^۲ + ۵x + ۱)$$

در نتیجه α و β ریشه‌های معادله $۳x^۲ + ۵x + ۱ = ۰$ می‌باشند لذا:

$$\alpha + \beta = -\frac{۵}{۳}, \alpha \cdot \beta = \frac{۱}{۳}$$

حاصل جمع ریشه‌های داده شده به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$S = \left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right) + \left(\frac{1}{\beta} + \alpha\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \alpha + \beta = \frac{-\frac{۵}{۳}}{\frac{۱}{۳}} + \left(-\frac{۵}{۳}\right) = -\frac{۲۰}{۳}$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right)\left(\frac{1}{\beta} + \alpha\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \alpha\beta + ۲ = ۳ + \frac{1}{۳} + ۲ = \frac{۱۶}{۳}$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$x^۲ - \left(-\frac{۲۰}{۳}\right)x + \frac{۱۶}{۳} = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۲۰x + ۱۶ = ۰$$

۶

گزینه درست: ۲

سوال ۶

گزینه «۲»

در معادله داده شده حاصل جمع ریشه‌ها برابر $S = -\frac{b}{a} = -\frac{-192}{3} = 64$ می‌باشد. بنابراین:

$$S = 64 \Rightarrow \alpha^2(\alpha - 3\beta) + \beta^2(3\alpha - \beta) = 64$$

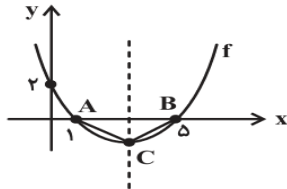
$$\Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = 64$$

$$\Rightarrow (\alpha - \beta)^3 = 64 \Rightarrow \alpha - \beta = 4$$

$$|\alpha - \beta| = 4$$

در نتیجه:

۷



گزینه درست: ۳

سوال ۷

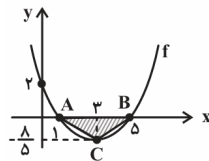
گزینه «۳»

سهی دارای ریشه‌های $x=1$ و $x=5$ می‌باشد، پس معادله آن به صورت زیر است:

$$y = a(x-1)(x-5) \xrightarrow{(0,2)} 2 = a(-1)(-5) \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$x_C = \frac{1+5}{2} = 3 \Rightarrow y_C = \frac{2}{5}(3-1)(3-5) = -\frac{8}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$



۸

گزینه درست: ۴

سوال ۸

گزینه «۴»

ابتدا طرف چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$(\sqrt[3]{x^3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} + 1)(\sqrt[3]{x^3} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{x^3} \times \sqrt[3]{x^3} + 1 + \sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^3}} \right) (\sqrt[3]{x^3} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^3} + 1}{\sqrt[3]{x^3}} \right) (\sqrt[3]{x^3} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$$

با استفاده از اتحاد $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ در صورت کسر، داریم:

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3})^3 - 1^3}{\sqrt[3]{x^3}} = 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow x^3 - 1 = (2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x^3})$$

$$\Rightarrow x^3 - 1 = 2x \Rightarrow x^3 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

۹

گزینه درست: ۴

سوال ۹

گزینه «۴»

ابتدا اندازه AH (فاصله نقطه A از خط BC) را به دست می آوریم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{0 - ۴}{-۱ - ۱} = ۲$$

$$B \left| \frac{۱}{۴} \right., m_{BC} = ۲$$

$$\Rightarrow y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - ۴ = ۲(x - ۱)$$

$$BC : ۲x - y + ۲ = 0$$

حال فاصله رأس $A \left| \frac{۱}{۲} \right.$ از خط BC برابر است با:

$$AH = \frac{|۲(۱) - ۱(۲) + ۲|}{\sqrt{۲^2 + (-۱)^2}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

از طرفی طول میانه AM به صورت زیر به دست می آید:

$$A \left| \frac{۱}{۲} \right., BC \text{ وسط } M \left| \begin{array}{l} \frac{x_B + x_C}{۲} = 0 \\ \frac{y_B + y_C}{۲} = ۲ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{(0-۱)^2 + (۲-۲)^2} = ۱$$

$$\frac{AH}{AM} = \frac{\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}}{۱} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

۱۰

گزینه درست: ۳

سوال ۱۰

گزینه «۳»

تبدیلات گفته شده را روی نمودار تابع f انجام می دهیم:

$$y = f(x) \xrightarrow[k \text{ واحد به چپ}]{} y = f(x + k)$$

$$\xrightarrow[\frac{۱}{۴} \text{ طول نقاط برابر}]{} y = f(۴x + k)$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y]{} y = f(-۴x + k)$$

$$\xrightarrow[۲ \text{ واحد به پایین}]{} g(x) = f(-۴x + k) - ۲$$

حال نمودار f و g را قطع می دهیم:

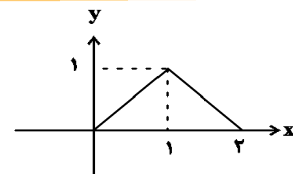
$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = f(-۴x + k) - ۲$$

$$\xrightarrow{x=۲} f(۲) = f(k - ۸) - ۲$$

$$\Rightarrow ۱ = \sqrt{۲k - ۱۹} - ۲ \Rightarrow \sqrt{۲k - ۱۹} = ۳$$

$$\xrightarrow[\text{توان ۲}]{} ۲k - ۱۹ = ۹ \Rightarrow k = ۱۴$$

(۱۱)



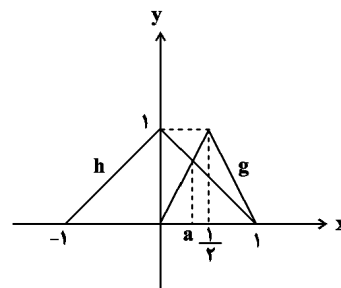
گزینه درست: ۳

سوال ۱۱

گزینه «۳»

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x; & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

توابع $g(x) = f(2x)$ و $h(x) = f(1-x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم g ، طول نقاط نمودار تابع f را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و برای رسم تابع h ، نمودار f را ابتدا یک واحد به چپ می‌بریم و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم. نمودار این دو تابع در شکل زیر رسم شده است.



باید بازه‌ای را پیدا کنیم که روی آن نمودار g بالاتر از نمودار h باشد. مطابق شکل این بازه به صورت $(a, 1)$ است. یعنی $b = 1$. مقدار a نیز طول نقطه برخورد شاخه $y = 2x$ از تابع g با شاخه $y = 1 - x$ از تابع h است.

$$\Rightarrow 2a = 1 - a \Rightarrow a = \frac{1}{3} \xrightarrow{b=1} a + b = \frac{4}{3}$$

(۱۲)

گزینه درست: ۳

سوال ۱۲

گزینه «۳»

A روی نمودار تابع $g(x) = 3f(5x-1) + 4$ قرار دارد. پس داریم:

$$g(-1) = 10 \Rightarrow 3f(-6) + 4 = 10 \Rightarrow f(-6) = 2$$

حال نقطه متناظر با A را $h(x) = 2f(-3x+k) + k$ می‌یابیم.

$$-3x + k = -6 \Rightarrow x = \frac{k+6}{3},$$

$$h\left(\frac{k+6}{3}\right) = 2f(-6) + k = 4 + k$$

پس نقطه $A\left(\frac{k+6}{3}, 4+k\right)$ روی نمودار تابع h قرار دارد. حال برای آنکه این نقطه بالای نیمساز ربع اول و سوم باشد. باید:

$$k + 4 > \frac{k+6}{3} \Rightarrow 2k > -6 \Rightarrow k > -3$$

به ازای -1 ، -2 ، k نقطه A بالای نیمساز ربع اول و سوم واقع می‌شود.

۱۳

گزینه درست: ۱

سوال ۱۳

گزینه «۱»

قضیه تقسیم را برای تقسیم $f(x) - xf(1-x)$ بر $x^2 - x$ می‌نویسیم:

$$f(x) - xf(1-x) = x(x-1)q(x) + 2x + 1$$

$x = 0$ و $x = 1$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x = 0 : f(0) = 1$$

$$x = 1 : f(1) - f(0) = 3 \Rightarrow f(1) = 4$$

حال برای تقسیم دوم نیز قضیه تقسیم را می‌نویسیم:

$$(x+2)f(x) = x(x-1)(x+1)q'(x) + ax + b$$

مجدداً با جای‌گذاری $x = 0$ و $x = 1$ داریم:

$$x = 0 : 2f(0) = b \Rightarrow b = 2$$

$$x = 1 : 3f(1) = 12 = a + b \xrightarrow{b=2} a = 10$$

$$\Rightarrow a - b = 8$$

۱۴

گزینه درست: ۲

سوال ۱۴

گزینه «۲»

دامنه تابع g به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(2x) - f(x+1) > 0 \xrightarrow{f \text{ اکیدا نزولی}} 2x < x+1 \Rightarrow x < 1$$

اما باید دقت کنیم که $f(2x)$ و $f(x+1)$ نیز قابل تعریف باشند. پس کافی است $x > 0$ باشد.

۱۵

گزینه درست: ۳

سوال ۱۵

گزینه «۳»

از روی دامنه و برد g ، دامنه و برد تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} -3 \leq x < 5 \Rightarrow -7 \leq 2x-1 < 9 \Rightarrow D_f = [-7, 9) \\ -10 \leq 2f+4 \leq 2 \Rightarrow R_f = [-7, -1] \end{cases}$$

حال دامنه و برد تابع h را می‌یابیم:

$$\begin{cases} (-4x+1) \in D_f \Rightarrow -7 \leq -4x+1 < 9 \Rightarrow -2 < x \leq 2 \Rightarrow D_h = (-2, 2] \\ -7 \leq f \leq -1 \Rightarrow -1 \leq f+6 \leq 5 \Rightarrow R_h = [-1, 5] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_h \cap R_h = [-1, 2]$$

اعداد صحیح این بازه -1 ، 0 ، 1 و 2 هستند که مجموع آن‌ها برابر ۲ است.

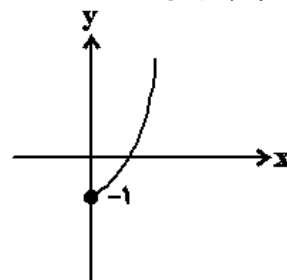
۱۶

گزینه درست: ۳

سوال ۱۶

گزینه «۳»

نمودار سهمی $y_1 = x^2 + 2x - 1; x \geq 0$ به صورت زیر است:



حال فرض می‌کنیم که تابع f یکنوا باشد، بنابراین لازم است شیب خط $y_2 = (m+1)x - (2m-3); x < 0$ مثبت باشد و عرض از مبدأ آن بزرگ‌تر از -۱ نباشد:

$$\begin{cases} m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \\ -2m+3 \leq -1 \Rightarrow m \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m \in [2, +\infty)$$

بنابراین برای اینکه تابع غیریکنوا باشد، باید m در بازه $[2, +\infty)$ نباشد، یعنی $m \in (-\infty, 2)$ باشد.

۱۷

گزینه درست: ۲

سوال ۱۷

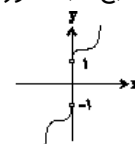
گزینه «۲»

ابتدا توجه کنید که ضابطه‌های تابع f به صورت زیر هستند:

$$x > 0 : f(x) = x(x^2 - 3x + 3 + \frac{1}{x}) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x-1)^3 + 2$$

$$x < 0 : f(x) = x(x^2 + 3x + 3 - \frac{1}{x}) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = (x+1)^3 - 2$$

بنابراین نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا می‌بریم تا نمودار تابع $y = (x-1)^3 + 2$ رسم شود. همچنین نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به چپ و دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = (x+1)^3 - 2$ رسم شود. بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است.



۱۸

گزینه درست: ۱

سوال ۱۸

گزینه «۱»

در توابع اکیداً صعودی داریم: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

$$2 > 1 \Rightarrow f(2) > f(1) \Rightarrow m - 4 > m^2 - 4m \Rightarrow m^2 - 5m + 4 < 0 \\ \Rightarrow (m-1)(m-4) < 0 \Rightarrow m \in (1, 4)$$

چون m عددی طبیعی است، مقادیر طبیعی $m = 2, 3$ در بازه موردنظر قرار دارد:

$$m \in \mathbb{N} \rightarrow \begin{cases} m = 2 : f = \{(1, -4), (2, -2), (2, 6), (3, 8)\} \\ \text{در این صورت به دلیل وجود دو زوج مرتب } (2, -2) \text{ و } (2, 6) \text{ دیگر } f \text{ تابع نیست. (غیر قابل قبول)} \\ m = 3 : f = \{(1, -3), (2, -1), (3, 6), (3, 8)\} \\ \text{در این صورت به دلیل وجود دو زوج مرتب } (3, 6) \text{ و } (3, 8) \text{ دیگر } f \text{ تابع نیست. (غیر قابل قبول)} \end{cases}$$

در نتیجه هیچ مقدار طبیعی برای m وجود ندارد.

۱۹

گزینه درست: ۲

سوال ۱۹

گزینه «۲»

ابتدا دامنه متغیر x را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - x^2 > 0 \\ x > 0, x \neq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < x < 1$$

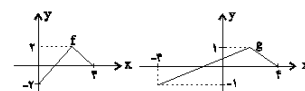
در این صورت تابع $g = \log_x \square$ اکیداً نزولی است. پس برای حل نامعادله داریم:

$$\log_x (1 - x^2) < \log_x 3x^2 \Rightarrow 1 - x^2 > 3x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 < 1 \xrightarrow{0 < x < 1} 0 < x < \frac{1}{2}$$

پس مجموعه جواب‌های نامعادله $(0, \frac{1}{2})$ است.

۲۰



گزینه درست: ۲

سوال ۲۰

گزینه «۲»

با توجه به نمودارها درمی‌یابیم که:

$$D_f = [0, 4], R_f = [-2, 2], D_g = [-4, 4], R_g = [-1, 1]$$

با انتقال a واحدی نمودار تابع f به سمت چپ، منقبض کردن دو برابری آن در راستای عمودی و انتقال یک واحد به سمت بالا، به نمودار

$$y_1 = \frac{1}{2} f(x + a) + 1$$

$$D_{y_1} = [-a, 4 - a], R_{y_1} = [0, 2]$$

با منقبض کردن دو برابری g در راستای افقی و سپس انتقال b واحدی نمودار در راستای عمودی به نمودار $y_2 = g(2x) + b$ خواهیم رسید، بنابراین داریم:

$$D_{y_2} = [-2, 2], R_{y_2} = [b - 1, b + 1]$$

دامنه‌های y_1 و y_2 را با هم و بردهای آن‌ها را نیز با هم برابر در نظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} [-a, 4 - a] = [-2, 2] \Rightarrow a = 2 \\ [b - 1, b + 1] = [0, 2] \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3$$

①

گزینه درست: ۴

سوال ۱

گزینه «۴»

کافی است سطر اول ماتریس A^2 را به دست آورده و ماتریس A ضرب کنیم:

$$A^2 \text{ سطر اول} = [2 \ 1 \ 5] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = [6 \ 2 \ 24]$$

$$A^3 \text{ سطر اول} = [6 \ 2 \ 24] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = [30 \ 6 \ 86]$$

②

گزینه درست: ۱

سوال ۲

گزینه ۱

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [11x - 1 \quad -x - 2 \quad -3x] \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 11x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(9x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{9} \end{cases}$$

③

گزینه درست: ۲

سوال ۳

گزینه ۲

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 4y - 1 & -2x + 4 \\ y + 7 & -3 \end{bmatrix}$$

برای اینکه ماتریس حاصل، قطری باشد، لازم است درایه‌های خارج قطر اصلی آن برابر صفر گردند. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y + 7 = 0 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$$

④

گزینه درست: ۴

سوال ۴

گزینه «۴»

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{جمع} = 6 \Rightarrow \frac{6}{2} = 3$$

۵

گزینه درست: ۱

سوال ۵

گزینه «۱»

$$D = ABC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1 \\ x & -x+2 & x \\ -x-2 & -3 & -2x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+5 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2x-7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$x+2 = -x-6 \Rightarrow$ مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی

$$\Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$$

۶

گزینه درست: ۱

سوال ۶

گزینه «۱»

ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم و سپس توان‌های بالاتر آن را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2A$$

$$\Rightarrow A^n = 2^{n-1} A \Rightarrow A^{20} = 2^{19} A = \begin{bmatrix} 2^{19} & -2^{19} \\ -2^{19} & 2^{19} \end{bmatrix}$$

$$A^{20} = 2^{19} A \Rightarrow \text{حاصل ضرب درایه‌های } A$$

۷

گزینه درست: ۲

سوال ۷

گزینه «۲»

گزینه‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

(۱) نادرستی این رابطه را می‌توان با مثال نقض نشان داد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \neq \bar{O}, B \neq \bar{O}, AB = \bar{O}$$

(۲) درستی این رابطه را اثبات می‌کنیم:

$$A = [a_{ij}] \Rightarrow rA = [ra_{ij}]$$

$$\Rightarrow [ra_{ij}] = \bar{O} \Rightarrow ra_{ij} = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{یا} \quad a_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow r = 0 \quad \text{یا} \quad [a_{ij}] = \bar{O}$$

$$\Rightarrow r = 0 \quad \text{یا} \quad A = \bar{O}$$

(۳) این رابطه در حالت کلی نادرست است، زیرا:

$$(AB)^T = (AB)(AB)$$

تذکر: اگر A و B تعویض‌پذیر باشند، این رابطه صحیح است.

(۴) جمع ماتریس با عدد معنی ندارد، بلکه معادل درست این فاکتورگیری به صورت زیر است:

$$A^T + 3A = A(A + 3I) = (A + 3I)A$$

۸

گزینه درست: ۳

سوال ۸

گزینه «۳»

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & y \\ 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 2y+4 \\ x-3 & 2y+1 \end{bmatrix}$$

ماتریس AB قطری است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 2y+4=0 \Rightarrow y=-2 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

حال ماتریس BA را محاسبه می‌کنیم:

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -12 & 10 & -27 \end{bmatrix}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، بزرگ‌ترین درایه ماتریس BA ، برابر ۱۰ است.

۹

گزینه درست: ۳

سوال ۹

گزینه «۳»

ابتدا عبارت خواسته شده در صورت سؤال را باز می‌کنیم:

$$\sum_{j=1}^4 a_{3j} = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34}$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A خواسته شده است. برای پیدا کردن این درایه‌ها کافی است سطر سوم ماتریس سمت چپ را در ماتریس سمت راست ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^4 a_{3j} = 9 - 1 + 12 - 3 = 17$$

۱۰

گزینه درست: ۴

سوال ۱۰

گزینه «۴»

سعی می‌کنیم توانی از ماتریس‌های A و B را پیدا کنیم که برابر ماتریس I یا مضربی از آن باشند.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

$$A^{99} + B^{100} = (A^2)^{49} \times A + (B^3)^{33} \times B = I^{49} \times A + (-I)^{33} \times B$$

$$= A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

۱

گزینه درست: ۱

سوال ۱

گزینه «۱»

$$(\lambda a + 6, \lambda a + 2) = 2(4a + 3, 4a + 1)$$

حال اگر $d^c = (4a + 3, 4a + 1)$ ، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} d^c | 4a + 3 &\Rightarrow d^c | 2 \xrightarrow{0 < d^c} d^c = 1 \quad \text{یا} \quad 2 \\ d^c | 4a + 1 &\end{aligned}$$

اما $d^c = 2$ غیرقابل قبول است، زیرا $4a + 1$ عددی فرد است و داریم $24a + 1$. بنابراین $d^c = 1$ و $d = 2d^c = 2$.

۲

گزینه درست: ۴

سوال ۲

گزینه «۴»

$$\left. \begin{aligned} d | n^2 - 4n &\xrightarrow{\times 5} d | 5n^2 - 20n \\ d | 5n + 6 &\xrightarrow{\times n} d | 5n^2 + 6n \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d | 26n$$

$$\left. \begin{aligned} d | 26n &\xrightarrow{\times 5} d | 130n \\ d | 5n + 6 &\xrightarrow{\times 26} d | 130n + 156 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d | 156$$

$$\Rightarrow d | 2^2 \times 3 \times 13$$

بنابراین بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای d به شرط آنکه عدد اول باشد، برابر ۱۳ است.

۳

گزینه درست: ۲

سوال ۳

گزینه «۲»

اگر $4 = (n^3 + 1, 8)$ باشد. باید $n^3 + 1$ مضرب ۴ باشد اما مضرب ۸ نباشد. حال بررسی می‌کنیم چه موقع $4 | n^3 + 1$.

دقت کنید $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$. چون $n^2 - n$ ضرب دو عد متوالی است پس زوج است و $n^2 - n + 1$ همواره فرد است پس

$n^3 + 1$ زمانی مضرب ۴ است که $n + 1$ مضرب ۴ باشد. $n + 1 = 4q$.

اما اگر q زوج باشد $n + 1$ مضرب ۸ می‌شود و ب.م.م حاصل ۸ می‌شود.

پس q عدد فرد است و $q = 2k + 1$.

$$n + 1 = 4q = 4(2k + 1) \Rightarrow n = 8k + 3$$

برای اینکه n ، دو رقمی باشد کافی است $12 \leq k \leq 1$ باشد، بنابراین ۱۲ مقدار برای n بدست می‌آید.

۴

گزینه درست: ۳

سوال ۴

گزینه «۳»

$$(a, 1000) = 125 \Rightarrow (a, 2^3 \times 5^3) = 5^3 \Rightarrow a \text{ فرد است}$$

$$\Rightarrow a^2 = 8k + 1 \Rightarrow 8 | a^2 - 1$$

$$\text{از طرفی: } 5 | a \Rightarrow 5 | a^2 \Rightarrow 5 | a^2 - 1$$

بنابراین:

$$(a^2 - 1, 8 \times 5) = (a^2 - 1, 8) = (8k, 8) = 8$$

۵

گزینه درست: ۲

سوال ۵

گزینه «۲»

فرض کنید $d = (6m - 3, 4m + 6)$ باشد. در این صورت داریم:

$$(12m - 6, 8m + 12) = 2(6m - 3, 4m + 6) = 2d$$

$$\left. \begin{array}{l} d|6m - 3 \xrightarrow{\times 2} d|12m - 6 \\ d|4m + 6 \xrightarrow{\times 2} d|8m + 12 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d|24$$

ازطرفی $6m - 3$ عددی فرد است، پس d نمی‌تواند زوج باشد، یعنی $d = 1$ یا $d = 3$ است (می‌توان نشان داد به ازای برخی مقادیر m ، $d = 1$ و برای سایر مقادیر $d = 3$ است). در نتیجه داریم:

$$6 \text{ یا } 3 = (12m - 6, 8m + 12) = 2$$

۶

گزینه درست: ۴

سوال ۶

گزینه «۴»

$$\begin{aligned} 2xy - y = x^3 + 2 &\Rightarrow y = \frac{x^3 + 2}{2x - 1} \Rightarrow 2x - 1 | x^3 + 2 \Rightarrow \begin{array}{l} 2x - 1 | 2x^3 + 4 \\ 2x - 1 | 2x^3 - x^2 \\ \hline \Rightarrow 2x - 1 | x^2 + 4 \end{array} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2x - 1 | 2x^2 + 8 \\ 2x - 1 | 2x^2 - x \\ \hline \Rightarrow 2x - 1 | x + 8 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2x - 1 | 2x + 16 \\ 2x - 1 | 2x - 1 \\ \hline \Rightarrow 2x - 1 | 17 \Rightarrow 2x - 1 = \pm 1 \text{ یا } \pm 17 \end{array}$$

پس $A \Big|_{-2}^0, B \Big|_3^1, C \Big|_{30}^{-8}, D \Big|_4^9$ نقطه با مختصات صحیح روی این منحنی هستند.

۷

گزینه درست: ۴

سوال ۷

گزینه «۴»

$$100 \leq a < 1000, 54a = k^2 \Rightarrow 2 \times 3^3 a = k^2 \Rightarrow a = 2 \times 3q^2$$

$$\Rightarrow 100 \leq 6q^2 < 1000 \Rightarrow 5 \leq q \leq 12 \Rightarrow \text{تعداد} = 12 - 5 + 1 = 8$$

۸

گزینه درست: ۴

سوال ۸

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = 19q + 3 \\ b = 19q' + 17 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 5a = 19(5q) + 15 = 19q_1 + 15 \\ -2b = 19(-2q') - 34 = 19q_2 - 34 \end{cases} \\ 5a - 2b = 19q_1 + 15 + 19q_2 - 34 &= 19q_1 + 19q_2 - 19 \\ &= 19(q_1 + q_2 - 1) \end{aligned}$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم، برابر صفر است.

۹

گزینه درست: ۴

سوال ۹

گزینه «۴»

با توجه به قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} a = 4q + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q + 15 \\ a = 5q' + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q' + 16 \end{array} \right\} &\xrightarrow{\text{تفاضل}} \\ a = 20(q - q') - 1 = 20(q - q') - 20 + 20 - 1 &= 20(\underbrace{q - q' - 1}_{q''}) + 19 \end{aligned}$$

پس باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۰، برابر ۱۹ است.

گزینه «۳»

اعداد به فرم $5k + 1$ و $5k + 4$ به مجموعه B و اعداد به فرم $5k + 3$ به مجموعه C تعلق دارند، پس اعداد به فرم $5k$ و $5k + 2$ متعلق به مجموعه A هستند.

با بررسی گزینه‌ها داریم:

گزینه «۱»:

$$1398 = 5 \times 279 + 3 \in C$$

گزینه «۲»:

$$1399 = 5 \times 279 + 4 \in B$$

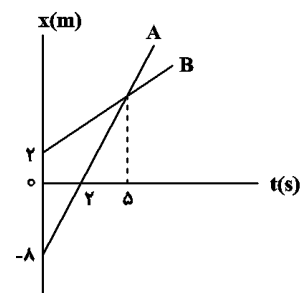
گزینه «۳»:

$$1400 = 5 \times 280 \in A$$

گزینه «۴»:

$$1401 = 5 \times 280 + 1 \in B$$

۱

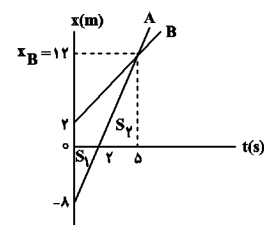


گزینه درست: ۴

سوال ۱

گزینه «۴»

روش اول: با توجه به نمودار مکان- زمان داده شده، متحرک A در لحظه $t = ۲s$ از مبدأ مکان می‌گذرد. بنابراین کافی است معادله مکان- زمان متحرک B را بیابیم و در معادله به جای t مقدار آن یعنی $۲s$ را قرار دهیم. به همین منظور از تشابه مثلث‌های $S_۱$ و $S_۲$ استفاده می‌کنیم:



$$\frac{x_B}{\Delta t} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow x_B = ۱۲m$$

سرعت متحرک B برابر شیب خط B می‌باشد که برابر است با:

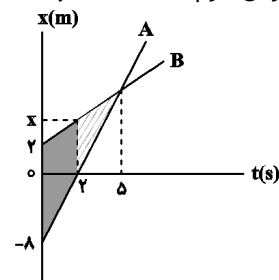
$$v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} = \frac{۱۲ - ۲}{۵ - ۰} = ۲ \frac{m}{s}$$

در آخر با استفاده از معادله مکان- زمان در حرکت با سرعت ثابت داریم:

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{x_{0B} = ۲m} x_B = ۲t + ۲$$

$$\xrightarrow{t = ۲s} x_B = (۲ \times ۲) + ۲ = ۶m$$

روش دوم: با استفاده از تشابه دو مثلث هاشورخورده داریم:



$$\frac{x}{10} = \frac{۳}{5} \Rightarrow x = ۶m$$

۲

گزینه درست: ۴

سوال ۲

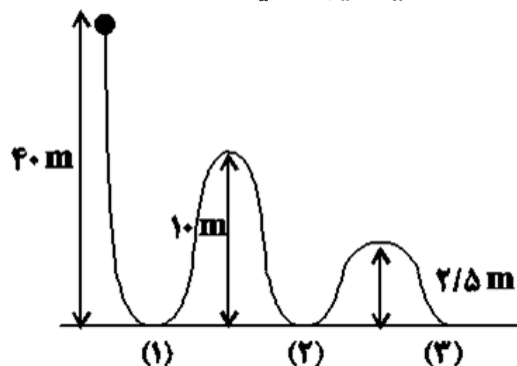
گزینه «۴»

با توجه به شکل و تعریف مسافت و جابه‌جایی، داریم:

$$\text{مسافت} = d = ۴۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۲/۵ + ۲/۵ = ۶۵m$$

$$\text{جابه‌جایی} = |\Delta x| = ۴۰m$$

$$\frac{|\Delta x|}{d} = \frac{۴۰}{۶۵} = \frac{۸}{۱۳} \quad \text{بنابراین:}$$



۳

گزینه درست: ۲

سوال ۳

گزینه «۲»

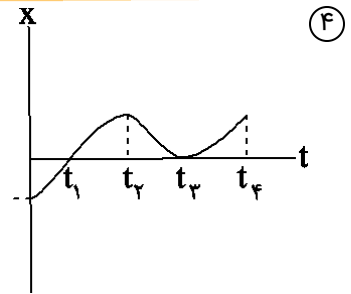
با توجه به این‌که متحرک در دو مرحله، کل مسیر حرکت را پیموده است، با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\begin{array}{c} \frac{4}{5}d \qquad \qquad \qquad \frac{1}{5}d \\ \hline \text{---} \end{array}$$

$$v_{av1} = v \qquad \qquad \qquad v_{av2} = \frac{1}{4}v$$

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \frac{4}{5}d \\ \Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_{av1}} = \frac{4d}{5v} \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta x_2 = \frac{1}{5}d \\ \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_{av2}} = \frac{d}{v} \end{cases}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\frac{4}{5}d + \frac{1}{5}d}{\frac{4d}{5v} + \frac{d}{v}} = \frac{1}{\frac{4}{5} + 1} = \frac{5}{9}v$$



گزینه درست: ۳

سوال ۴

گزینه «۳»

بررسی گزینه‌ها:

(۱) نادرست: فقط در لحظه t_1 جهت بردار مکان عوض می‌شود.

(۲) نادرست: در لحظه‌های t_2 و t_3 جهت حرکت عوض می‌شود.

(۳) صحیح: شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر با سرعت متحرک است. در لحظه t_3 شیب مماس برابر صفر است، پس $v_3 = 0$ و در لحظه t_1 شیب مثبت است، پس $v_1 > 0$. برای محاسبه شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{v_3 - v_1}{\Delta t} = \frac{0 - v_1}{\Delta t} < 0$$

(۴) نادرست: در لحظه صفر، $x_0 < 0$ و در لحظه t_2 ، $x_2 > 0$ است. بنابراین برای محاسبه سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_0}{\Delta t} \neq 0$$

۵

گزینه درست: ۳

سوال ۵

گزینه «۳»

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{13 - (-5)}{5 - 2} = 6 \frac{m}{s}$$

$$x = vt + x_0 \xrightarrow{t=4s} x - x_0 = 6 \times 4 = 24m$$

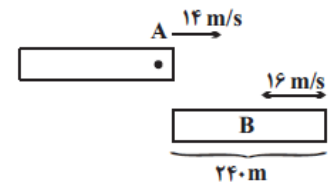
۶

گزینه درست: ۳

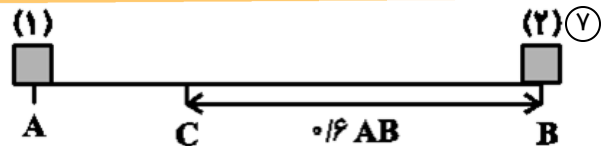
سوال ۶

گزینه «۳»

از لحظه‌ای که ابتدای دو قطار در کنار هم قرار می‌گیرد تا لحظه‌ای که انتهای قطار B به ابتدای قطار A می‌رسد، لوکوموتیوران قطار A ، قطار B را در کنار خود می‌بیند بنابراین مجموع اندازه جابه‌جایی‌های قطارهای A و B باید برابر با طول قطار B شود. داریم:



$$|\Delta x_A| + |\Delta x_B| = 240 \Rightarrow 14t + 16t = 240 \Rightarrow t = 8s$$



گزینه درست: ۳

سوال ۷

گزینه «۳»

با توجه به این که $BC = 0.6AB$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت که $AC = AB - 0.6AB = 0.4AB$ است. از طرفی چون هر دو متحرک در نقطه C از کنار یکدیگر عبور می‌کنند. پس تا قبل از رسیدن به C زمان سپری شده برای هر دو متحرک یکسان است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} |\Delta x_{AC}| = |v_1| t \\ |\Delta x_{BC}| = |v_2| t \end{cases} \Rightarrow \frac{|\Delta x_{AC}|}{|\Delta x_{BC}|} = \frac{|v_1|}{|v_2|}$$

$$\frac{|\Delta x_{AC}| = 0.4|\Delta x_{AB}|}{|\Delta x_{BC}| = 0.6|\Delta x_{AB}|} \Rightarrow \frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{2}{3}$$

هنگامی که دو متحرک از کنار یکدیگر عبور کردند، متحرک (۱) جابه‌جایی BC و متحرک (۲) جابه‌جایی AC را خواهد داشت، پس داریم:

$$\begin{cases} |\Delta x_{AC}| = |v_2| t_2 \\ |\Delta x_{BC}| = |v_1| t_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{|\Delta x_{AC}|}{|\Delta x_{BC}|} = \frac{|v_2|}{|v_1|} \times \frac{t_2}{t_1}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow t_1 = 4.5s$$

۸

گزینه درست: ۴

سوال ۸

گزینه «۴»

ابتدا سرعت حرکت قطار را بر حسب متر بر ثانیه محاسبه می‌کنیم:

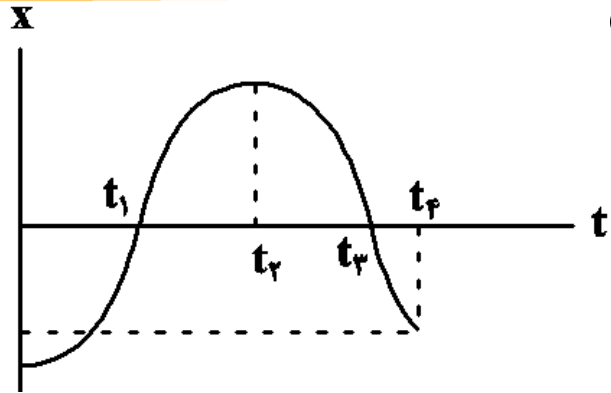
$$v = 88/2 \frac{km}{h} = \frac{88/2}{3.6} \frac{m}{s} = 24.5 \frac{m}{s}$$

چون طول پل بزرگتر از طول قطار است، بنابراین در طول حرکت قطار روی پل، حتماً لحظه‌هایی وجود دارد که قطار به‌طور کامل روی پل قرار دارد. از لحظه‌ای که قطار در آستانه ورود به پل است تا لحظه‌ای که به‌طور کامل روی پل قرار می‌گیرد، قطار مسافتی را به اندازه طول خود طی می‌کند. این مدت زمان برابر است با:

$$\Delta x = vt \Rightarrow 196 = 24.5t \Rightarrow t = 8s$$

با همین استدلال برای لحظه‌ای که قطار در آستانه خروج از روی پل است تا زمانی که به‌طور کامل از روی پل عبور می‌کند، مدت زمان همان ۸s به‌دست می‌آید. بنابراین در مجموع قطار به مدت ۱۶s به‌طور کامل روی پل قرار ندارد.

۹



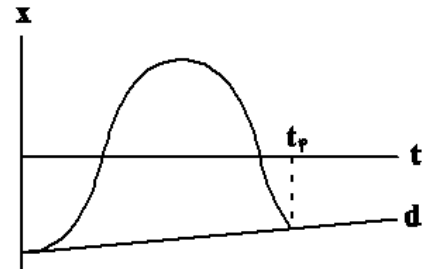
گزینه درست: ۳

سوال ۹

گزینه «۳»

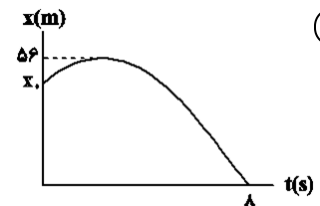
به بررسی هر یک از عبارات می‌پردازیم:

- (الف) درست: در لحظه‌هایی که متحرک از مبدأ مختصات عبور می‌کند (t_3, t_1) ، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد.
 (ب) درست: شیب خط واصل بین دو لحظه از نمودار مکان - زمان، سرعت متوسط بین آن دو لحظه را نشان می‌دهد.



- با توجه به شکل چون شیب خط d مثبت است، پس بردار سرعت متوسط بین دو لحظه صفر تا t_4 در جهت محور x است.
 (پ) نادرست: فقط در لحظه t_2 جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند.
 (ت) نادرست: متحرک در لحظه t_2 بیشترین فاصله را از نقطه شروع حرکت خود (مبدأ حرکت) دارد.

۱۰



گزینه درست: ۲

سوال ۱۰

گزینه «۲»

سرعت متوسط، جابه‌جایی در واحد زمان است و طبق صورت سؤال، در ۸ ثانیه اول حرکت این متحرک، اندازه آن برابر با $4/5 \frac{m}{s}$ است.
 پس:

$$|v_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 4/5 = \frac{|0 - x_0|}{8} \Rightarrow x_0 = 36m$$

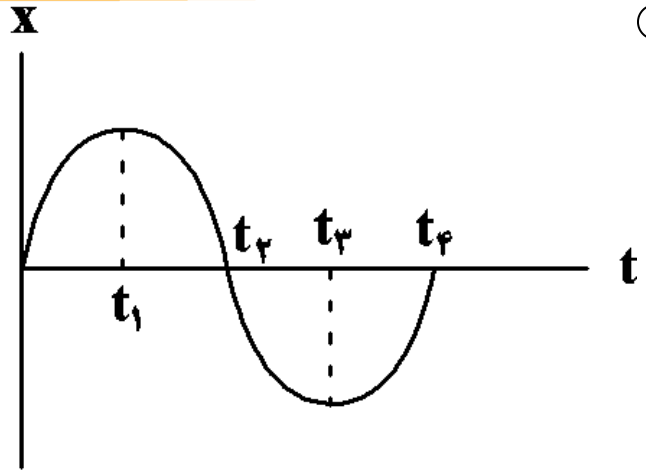
مسافت طی شده در ۸ ثانیه اول حرکت برابر است:

$$\ell = (56 - 36) + |0 - 56| = 76m$$

بنابراین تندی متوسط متحرک برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{76}{8} \Rightarrow s_{av} = 9/5 \frac{m}{s}$$

۱۱



گزینه درست: ۲

سوال ۱۱

گزینه «۲»

در نمودار مکان - زمان، شیب خط واصل بین دو لحظه در نمودار، سرعت متوسط را نشان می‌دهد. از طرفی شیب خط مماس بر نمودار، سرعت را نشان می‌دهد. با توجه به این نکات، به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه (۱): در بازه t_1 تا t_3 شیب خط واصل منفی است، در نتیجه سرعت متوسط در این بازه منفی است. از لحظه t_1 تا t_2 ، اندازه شیب خط مماس افزایش و از لحظه t_2 تا t_3 اندازه شیب خط مماس کاهش می‌یابد. پس از t_1 تا t_2 تندی متحرک در حال افزایش و از t_2 تا t_3 تندی متحرک در حال کاهش است.

گزینه (۲): از t_1 تا t_2 سرعت متوسط منفی و تندی متحرک در حال افزایش است.

گزینه (۳): در بازه زمانی t_2 تا t_3 ، سرعت متوسط منفی و تندی در حال کاهش است.

گزینه (۴): در بازه زمانی t_2 تا t_3 ، سرعت متوسط مثبت و تندی در حال افزایش است.

۱۲

گزینه درست: ۱

سوال ۱۲

گزینه «۱»

با توجه به تعریف شتاب متوسط، تغییر سرعت در دو ثانیه اول و سه ثانیه بعد از آن را می‌یابیم.

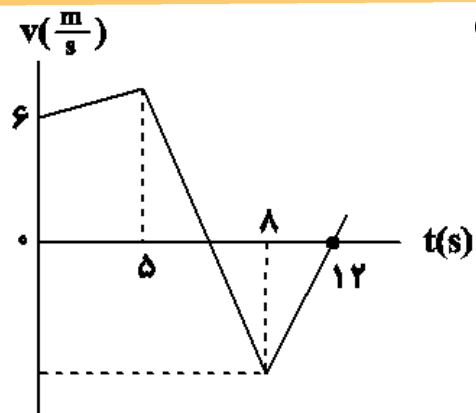
$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} 1/5 \vec{i} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_0}{3} \Rightarrow \vec{v}_2 - \vec{v}_0 = 3 \vec{i} \frac{m}{s} \\ -5/3 \vec{i} = \frac{\vec{v}_5 - \vec{v}_2}{3} \Rightarrow \vec{v}_5 - \vec{v}_2 = -5 \vec{i} \frac{m}{s} \end{cases}$$

حال تغییر سرعت در پنج ثانیه اول و پس از آن شتاب متوسط را در این پنج ثانیه می‌یابیم.

$$\begin{cases} \vec{v}_2 - \vec{v}_0 = 3 \vec{i} \\ \vec{v}_5 - \vec{v}_2 = -5 \vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_5 - \vec{v}_0 = -2 \vec{i} \left(\frac{m}{s} \right)$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_5 - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{-2 \vec{i}}{5} \Rightarrow \vec{a}_{av} = -0.4 \vec{i} \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

۱۳

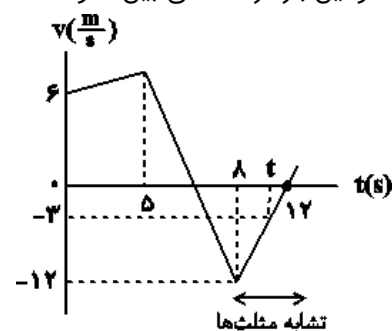


گزینه درست: ۲

سوال ۱۳

گزینه «۲»

سومین بار در لحظه‌ای بین ۸s و ۱۲s تندی متحرک نصف تندی اولیه یعنی $\frac{3}{2} \frac{m}{s}$ می‌شود. برای محاسبه این زمان، داریم:



$$\text{تشابه مثلث‌ها} \Rightarrow \frac{12}{3} = \frac{12-8}{12-t} \Rightarrow t = 11s$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{t=0} v_0 &= 6 \frac{m}{s}, \quad \xrightarrow{t=11s} v_{11} = -3 \frac{m}{s} \\ a_{av} &= \frac{v_{11} - v_0}{t - 0} = \frac{-3 - 6}{11} = \frac{-9}{11} \frac{m}{s^2} \Rightarrow |a_{av}| = \frac{9}{11} \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

۱۴

گزینه درست: ۱

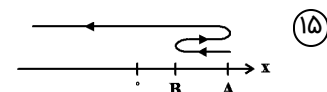
سوال ۱۴

گزینه «۱»

عبارت‌های «الف» و «ت» درست است. بررسی سایر عبارت‌ها:

(ب) نادرست: زیرا عقربه تندی‌سنج، تندی لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد نه تندی متوسط را.

(پ) نادرست: زیرا متحرکی که روی محور x در حال حرکت است، اگر در مکان‌های منفی در جهت مثبت محور x حرکت کند، دارای بردار مکان منفی خواهد بود.



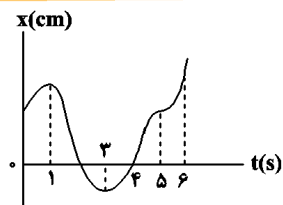
۱۵

گزینه درست: ۲

سوال ۱۵

گزینه «۲»

متحرک از یک مکان مثبت (رد گزینه‌های «۱» و «۳») و در خلاف جهت محور x (رد گزینه «۴») شروع به حرکت کرده است و دو بار در مکان‌های A و B تغییر جهت داده و نهایتاً در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. با این توضیحات، نمودار مکان - زمان رسم شده در گزینه «۲» پاسخ صحیح این سوال است.



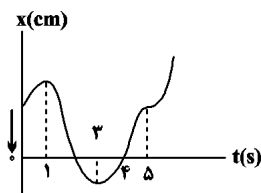
۱۶

گزینه درست: ۴

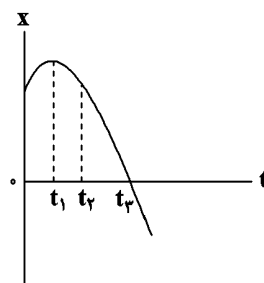
سوال ۱۶

گزینه «۴»

شرط تغییر جهت حرکت متحرک این است که باید اندازه سرعت صفر شده و علامت آن نیز عوض شود. شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در هر لحظه برابر است با سرعت لحظه‌ای. در لحظه‌های $t = 1s$ و $t = 3s$ هم شیب صفر شده یعنی اندازه سرعت صفر شده و هم علامت آن عوض شده یعنی متحرک تغییر جهت داده است. اما در لحظه $t = 5s$ شیب صفر شده، اما متحرک تغییر جهت نداده است بنابراین متحرک ۲ بار تغییر جهت و ۳ بار متوقف شده است. همچنین طبق نمودار بردار جابه‌جایی در بازه زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 4s$ در خلاف جهت محور x است.



۱۷

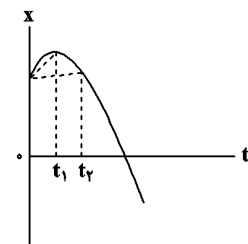


گزینه درست: ۴

سوال ۱۷

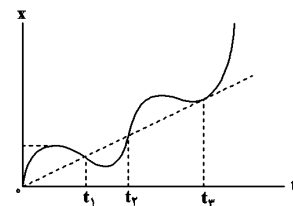
گزینه «۴»

الف) درست: شیب خط واصل بین دو لحظه در نمودار مکان - زمان بیانگر سرعت متوسط متحرک می‌باشد. با توجه به اینکه شیب خط واصل بین بازه زمانی صفر تا t_1 بیشتر از صفر تا t_2 است، پس می‌توان نتیجه گرفت که سرعت متوسط در بازه زمانی صفر تا t_1 بیشتر از سرعت متوسط در بازه زمانی صفر تا t_2 است.



ب) نادرست: بردار مکان برداری است که ابتدای آن مبدأ مکان و انتهای آن مکان جسم است. بنابراین بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان عبور کند. پس بردار مکان متحرک در لحظه‌ای t_3 تغییر جهت می‌دهد نه لحظه t_1 .
پ) نادرست: متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 در جهت محور x و پس از آن در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بنابراین سرعت آن ابتدا در جهت محور x و سپس در خلاف جهت محور x است (دقت کنید که سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی صفر تا t_3 در خلاف جهت محور x است، نه سرعت لحظه‌ای آن در کل بازه).
ت) نادرست: متحرک هنگامی تغییر جهت می‌دهد که سرعت آن صفر شود و تغییر علامت دهد که این اتفاق در لحظه t_1 می‌افتد.

۱۸



گزینه درست: ۲

سوال ۱۸

گزینه «۲»

هر یک از عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) نادرست: خط مماس بر نمودار در لحظاتی افقی است و بنابراین متحرک در آن لحظه‌ها متوقف شده است.

ب) نادرست: چون شیب خط واصل بین دو لحظه t_1 تا t_2 با شیب خط مماس بر نمودار در لحظه t_3 برابر است، بنابراین سرعت

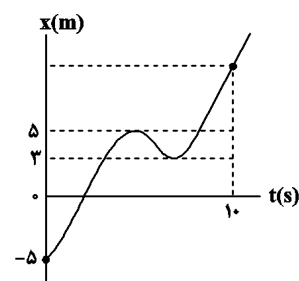
متوسط در بازه t_1 تا t_2 برابر با سرعت لحظه‌ای در لحظه t_3 است ولی درباره تندی متوسط نمی‌توان اظهار نظر کرد.

پ) درست: در هر کدام از بازه‌های زمانی صفر تا t_1 ، t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 ، مسافتی که متحرک در جهت محور X طی می‌کند، از مسافتی که

در خلاف جهت محور X طی می‌کند، بیش‌تر است و بنابراین در مجموع سه بازه یعنی صفر تا t_3 ، مجموع مسافت‌های طی شده در

جهت محور X بیش‌تر از مجموع مسافت‌های طی شده در خلاف جهت محور X است.

۱۹



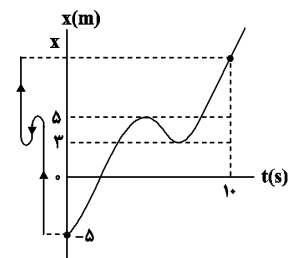
گزینه درست: ۳

سوال ۱۹

گزینه «۳»

اگر مکان متحرک را در لحظه $t = 10s$ برابر X بنامیم، برای تعیین تندی متوسط و سرعت متوسط، باید مقادیر مسافت طی شده و

جابه‌جایی را بیابیم، بنابراین داریم:



$$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 5 - (-5) + |3 - 5| + x - 3$$

$$\Rightarrow \ell = 9 + x \text{ (m)}$$

$$\Delta x = x - (-5) \Rightarrow \Delta x = x + 5 \text{ (m)}$$

حال برای تعیین تندی متوسط و سرعت متوسط در ده ثانیه اول داریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 10s]{\ell = 9+x \text{ (m)}} s_{av} = \frac{9+x}{10}$$

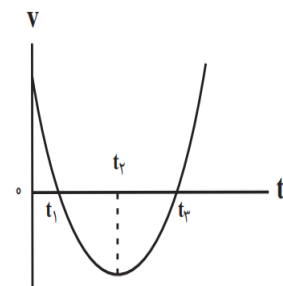
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 10s]{\Delta x = x+5 \text{ (m)}} v_{av} = \frac{x+5}{10}$$

و در آخر داریم:

$$s_{av} - v_{av} = \frac{9+x}{10} - \left(\frac{x+5}{10} \right) = \frac{9+x-x-5}{10}$$

$$\Rightarrow s_{av} - v_{av} = 0.4 \frac{m}{s}$$

۲۰



گزینه درست: ۲

سوال ۲۰

گزینه «۲»

شیب نمودار سرعت - زمان نشان دهنده شتاب لحظه‌ای است.

تندشونده $\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ v < 0 \end{cases} \Rightarrow av > 0$ از t_1 تا t_2

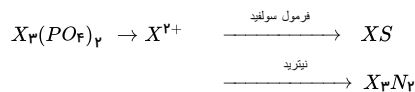
کندشونده $\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ v < 0 \end{cases} \Rightarrow av < 0$ از t_2 تا t_3

۱

گزینه درست: ۴

سوال ۱

گزینه «۴»



با توجه به بار یون X، می‌تواند در گروه دوم جدول تناوبی باشد.

۲

گزینه درست: ۳

سوال ۲

گزینه «۳»

۳

گزینه درست: ۴

سوال ۳

گزینه «۴»

۴

گزینه درست: ۲

سوال ۴

گزینه «۲»

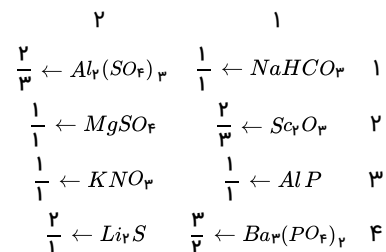
۵

گزینه درست: ۴

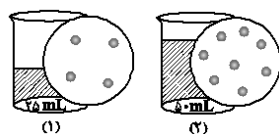
سوال ۵

گزینه «۴»

فرمول شیمیایی و نسبت شمار کاتیون‌ها به آنیون‌ها در ترکیب‌های یونی داده شده به صورت زیر است:



۶



گزینه درست: ۱

سوال ۶

گزینه ۱

$$\text{غلظت محلول (۱)} = \frac{4 \times 0.1}{0.025} = 16 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$\text{غلظت محلول (۲)} = \frac{8 \times 0.1}{0.05} = 16 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

غلظت هر دو محلول برابر است، بنابراین، با مخلوط شدن آن‌ها هم غلظت تغییر نخواهد کرد.

۷

گزینه درست: ۳

سوال ۷

گزینه ۳

قلع (IV) کلرید : $SnCl_4$ سدیم اکسید : Na_2O

روی نیترات $Zn(NO_3)_2$ باریم هیدرید : BaH_2

$SnCl_4$ یک ترکیب مولکولی است، بنابراین می‌توان به کمک عدد اکسایش آن را نام‌گذاری کرد.

۸

گزینه درست: ۳

سوال ۸

گزینه «۳»

نسبت جرم مولی آنیون به کاتیون را در دو ترکیب داده شده محاسبه می‌کنیم:

$$ScPO_4 \Rightarrow \frac{95}{11} = 2/11$$

$$MgSO_4 \Rightarrow \frac{96}{24} = 4$$

$$AlPO_4 \Rightarrow \frac{95}{27} \approx 3/51$$

$$CaSO_4 \Rightarrow \frac{96}{40} = 2/4$$

نسبت جرم مولی آنیون به کاتیون در دو ترکیب دیگر داده شده برابر است با:

۹

گزینه درست: ۲

سوال ۹

گزینه «۲»

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{گرم حل شونده}}{\text{گرم محلول}} \times 100$$

$$48 = \frac{x}{160} \times 100 \Rightarrow x = 76.8 \text{ g } CaBr_2$$

$$? \text{ mol } CaBr_2 = 76.8 \text{ g } CaBr_2 \times \frac{1 \text{ mol } CaBr_2}{200 \text{ g } CaBr_2}$$

$$= 0.384 \text{ mol } CaBr_2$$

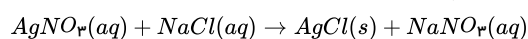
۱۰

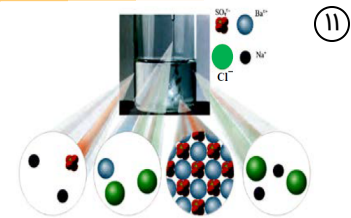


گزینه درست: ۴

سوال ۱۰

رسوب سفید نقره کلرید از واکنش محلول نقره نیترات با محلول سدیم کلرید تشکیل می‌شود. معادله‌ی نمادی مربوط به این واکنش به‌صورت زیر است:



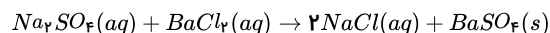


گزینه درست: ۳

سوال ۱۱

گزینه «۳»

ابتدا معادله واکنش را نوشته و موازنه می‌کنیم:



(آ) نسبت تعداد آنیون به کاتیون در رسوب باریم سولفات ۱ به ۱ است.

(ب) تفاوت مجموع ضرایب استوکیومتری واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها:

$$3 - 2 = 1$$

(پ) سدیم سولفات در یک واحد فرمولی دارای ۳ مول یون، باریم کلرید نیز ۳ مول یون دارد؛ در مجموع ۶ مول یون در معادله داریم. از طرفی با احتساب ضریب ۲ در سمت فراورده ۲ مول یون کلرید داریم، بنابراین خواهیم داشت:

$$9 \text{ mol یون} \times \frac{2 \text{ mol } Cl^-}{6 \text{ mol یون}} = 3 \text{ mol } Cl^-$$

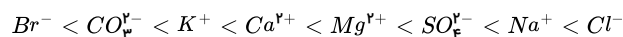
۱۲

گزینه درست: ۱

سوال ۱۲

گزینه «۱»

با توجه به جدول خود را ببازمایید صفحه ۸۷ کتاب درسی شیمی دهم، مقایسه جرم یون‌ها به صورت زیر است:



۱۳

گزینه درست: ۲

سوال ۱۳

گزینه «۲»

$$M_{Na^+} = M_{NaOH} = 0.25 = \frac{n}{2L} \Rightarrow n = 0.5 \text{ mol } NaOH$$

$$?g \text{ } NaOH = 0.5 \text{ mol } NaOH \times \frac{40g \text{ } NaOH}{1 \text{ mol } NaOH} = 20g \text{ } NaOH$$

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{20g}{200g} \times 100 = 10\%$$

۱۴

گزینه درست: ۳

سوال ۱۴

گزینه «۳»

$$\frac{4/5 \text{ mol } NaOH}{1L \text{ محلول}} = \frac{4/5 \text{ mol } NaOH}{1000m \text{ محلول}} = \frac{x \text{ mol } NaOH}{300m \text{ محلول}}$$

$$\Rightarrow 1/35 \text{ mol } NaOH$$

$$1/35 \text{ mol } NaOH \times \frac{40g \text{ } NaOH}{1 \text{ mol } NaOH} \Rightarrow 54g \text{ } NaOH$$

$$\text{درصد جرمی} = \frac{54g \text{ } NaOH}{100g \text{ محلول}} \Rightarrow \frac{54g \text{ } NaOH}{100g \text{ آب}} = \frac{54g \text{ } NaOH}{xg \text{ آب}} \Rightarrow x = 66g$$

۱۵

گزینه درست: ۱

سوال ۱۵

گزینه «۱»

یون هیدروکسید OH^-

یون کربنات CO_3^{2-}

یون فسفات PO_4^{3-}

$-6 = (-1) + (-2) + (-3)$: جمع جبری بارها

$1 + 3 + 4 = 8$: مجموع اکسیژن‌های یون‌ها

$2 = 8 - 6$: مجموع بارها و اکسیژن‌ها

۱۶

گزینه درست: ۴

سوال ۱۶

گزینه «۴»

فقط مورد (ت) نادرست است.

موارد (I) و (پ) مطابق کتاب درسی درست‌اند.

مورد (ب) $\Rightarrow$ می‌توان گفت اگر رابطه درصد جرمی را در 10^4 ضرب کنیم، به رابطه ppm می‌رسیم:

$$\underbrace{\frac{\text{حل شونده (g)}}{\text{محلول (g)}} \times 100}_{\text{درصد جرمی}} \times 10^4 = \underbrace{\frac{\text{حل شونده (g)}}{\text{محلول (g)}} \times 10^6}_{\text{رابطه ppm}}$$

مورد (ت) $\Rightarrow$ به‌جای غلیظ باید «رقیق» نوشته شود.

۱۷

گزینه درست: ۴

سوال ۱۷

گزینه «۴»

دستگاه گلوکومتر، میلی‌گرم گلوکز در هر دسی‌لیتر از خون را نشان می‌دهد:

$$\text{گلوکز } 180 \times \frac{\text{گلوکز } 5/25 \times 10^{-3} \text{ mol/g}}{1000 \text{ mL خون}} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ g}} = 94/5 \text{ m}$$

۱۸

گزینه درست: ۳

سوال ۱۸

$$\begin{aligned} \text{محلول } 1 \text{ mL} \times \frac{1000 \text{ mL}}{1 \text{ mL}} \times \frac{1/05 \text{ g}}{1 \text{ mL}} \\ \times \frac{10600 \times 10^{-6} \text{ g Na}^+}{1 \text{ g محلول}} \times \frac{1 \text{ mol Na}^+}{23 \text{ g Na}^+} = 0/48 \text{ mol Na}^+ \\ \Rightarrow M_{Na^+} = \frac{0/48 \text{ mol}}{1 \text{ L محلول}} = 0/48 \text{ mol. L}^{-1} \end{aligned}$$

۱۹

گزینه درست: ۴

سوال ۱۹

گزینه «۴»

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه «۱»: نزدیک به ۷۵٪ سطح زمین را آب پوشانده است.

گزینه «۲»: در واکنش‌های زیست‌کره درشت مولکول‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند.

گزینه «۳»: اگر کره زمین را مسطح در نظر بگیریم، آب همه سطح آن را تا ارتفاع بیش از ۲ کیلومتری می‌پوشاند.

گزینه «۲»

گزینه ۱) یکی از منابع تهیه فلز منیزیم، آب دریا می‌باشد و این عنصر به شکل $Mg^{2+}(aq)$ در آب دریا وجود دارد.

گزینه ۲) با افزودن مقداری ماده حل شونده به یک محلول با حجم ثابت، غلظت محلول افزایش می‌یابد.

گزینه ۳) انحلال‌پذیری نمک‌ها در آب تحت تأثیر دما و نوع نمک می‌باشد.

گزینه ۴) باریم سولفات، نقره کلرید و کلسیم فسفات در آب نامحلول اند، بنابراین میزان انحلال‌پذیری آن‌ها کمتر از ۱٪ گرم در ۱۰۰ گرم آب است.